CAPES DE MATHEMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

Dans tout le problème on se place dans un plan noté E; la distance de deux points x et y de E est notée $d(x, y)$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v}.\vec{w}$. Étant donné une partie P fermée non vide de E et un point x de E, on appelle distance de x à P et on note $d(x, P)$ le nombre réel positif défini par la relation

$$d(x, P) = \inf_{u \in P} d(x, u).$$

Étant donné un nombre réel $\alpha \geqslant 0$, on note $B(P, \alpha)$, ou encore $B(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, P) \leqslant \alpha$; si $\alpha > 0$, on note $L(P, \alpha)$, ou encore $L(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, P) = \alpha$. Les lignes de niveau $L(\alpha)$ sont appelées *lignes de distance* à P. Étant donné des parties A et B fermées non vides de E, on appelle *médiatrice* de A et B et on note $M(A, B)$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, A) = d(x, B)$. Plus généralement, étant donné un nombre réel λ appartenant à $[0, 1]$, on appelle *ligne de partage entre* A *et* B dans le rapport λ l'ensemble $C(\lambda)$ des points x de E tels que $(1 - \lambda)\, d(x, A) = \lambda\, d(x, B)$.

L'objectif du problème est d'étudier la fonction distance et les lignes de distance, ce qui fait l'objet des parties I et II, et les lignes de partage, ce qui fait l'objet de la partie III. Les médiatrices sont étudiées dans la partie II : elles fournissent un exemple important de ligne de partage, mais elles constituent aussi un outil intéressant pour la recherche des lignes de distance. Enfin, dans la partie III, on étudie les fonctions dont les lignes de niveau sont les lignes de partage. Le problème combine la mise en œuvre des méthodes de la géométrie élémentaire avec celle de quelques outils topologiques simples.

I. Lignes de distance à une partie

On désigne par P une partie fermée non vide de E.

Étant donné un point a de P, on appelle *zone d'attraction de a relative* à P et on note $Z(a)$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, P) = d(x, a)$, c'est-à-dire tels que la distance $d(x, P)$ soit atteinte au point a.

1. PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE À UNE PARTIE.

a. Soit x un point de E; montrer qu'il existe au moins un point a de P tel que $d(x, P) = d(x, a)$.

b. Prouver que, pout tout couple (x, y) de points de E,

$$d(x, P) \leqslant d(x, y) + d(y, P)$$

En déduire que la fonction $x \longmapsto d(x, P)$ est lipschitzienne sur E dans le rapport 1.

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES ZONES D'ATTRACTION.

Soit a un point de P.

a. Caractérisation de la zone d'attraction de a à l'aide de demi-plans.

Soit x un point de E. Montrer qu'il est équivalent de dire :

a. Le point x appartient à $Z(a)$;

b. Pour tout point b de P différent de a, le point x appartient au demi-plan fermé $H_b(a)$ limité par la médiatrice des points a et b et contenant a.

b. Montrer que a appartient à $Z(a)$ et que $Z(a) \cap P$ est réduite au point a. Déterminer $Z(a)$ lorsque a appartient à l'intérieur de P.

c. Montrer que la réunion des zones d'attraction $Z(u)$, où u parcourt P, est égale à E.

d. Établir que $Z(a)$ est une partie fermée de E.

Soit $L(\alpha)$ une ligne de distance à P. Montrer que $L(\alpha) \cap Z(a) = \Gamma(a\,;\alpha) \cap Z(a)$, où $\Gamma(a, \alpha)$ désigne le cercle de centre a et de rayon α.

3. EXEMPLES USUELS DE ZONES D'ATTRACTION ET DE LIGNES DE DISTANCE.

a. Préciser sur des figures les zones d'attraction des points de P lorsque P est un demi-plan, une droite, un segment, un disque, un cercle.

b. Dans chacun de ces cas, déterminer les lignes de distance à P, et tracer sur les figures précédentes quelques-unes de ces lignes.

Déterminer aussi les points x de E tels que la distance $d(x, P)$ soit atteinte en un point a et un seul.

4. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE DES ZONES D'ATTRACTION.

Soit a un point de P.

a. Caractérisation géométrique des zones d'attraction.

Soit x un point de E distinct de a ; montrer qu'il est équivalent de dire :

a. Le point x appartient à $Z(a)$;

b. Le disque ouvert de centre x et de rayon $\alpha = d(x, a)$ ne rencontre pas P.

b. Soit b un point de P distinct de a tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans P. Montrer que $Z(a) \cap Z(b)$ est vide.

c. On suppose que $Z(a)$ contient un point x distinct de a. Montrer que pour tout point y de $[a, x]$ distinct de x, la distance $d(y, P)$ est atteinte au seul point a ; en particulier $Z(a)$ contient $[a, x]$.

d. Étant donné un vecteur unitaire $\vec{k}$, on note $\Delta(\vec{k})$ la demi-droite d'origine a constituée des points x tels que $\overrightarrow{ax} = \lambda \vec{k}$, où $\lambda \geqslant 0$. Montrer qu'il est équivalent de dire :

a. La zone d'attraction $Z(a)$ contient $\Delta(\vec{k})$;

b. Pour tout point u de P, $\vec{k}.\overrightarrow{au} \leqslant 0$.

e. Donner un exemple d'une partie P et d'un point a de la frontière de P tel que $Z(a)$ soit réduite au point a.

5. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES LIGNES DE DISTANCE.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha \geqslant 0$, $B(\alpha)$ est une partie fermée de E contenant P; comparer $B(0)$ et P.

b. Soient α et β des nombres réels strictement positifs; montrer que $B(B(\alpha), \beta) = B(\alpha + \beta)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la ligne de distance $L(\alpha)$ est une partie fermée de E, et que l'intérieur de $L(\alpha)$ est vide (on pourra utiliser 4.*c*).

d. On suppose que P est distincte de E. Montrer que l'ensemble I des nombres réels strictement positifs α tels que $L(\alpha)$ soit non vide est un intervalle non vide d'origine 0, et que, si P est compacte, $I =]0, +\infty[$. Donner un exemple de partie P telle que $I =]0, 1]$ et un exemple de partie P telle que $I =]0, 1[$.

6. CAS DES PARTIES CONVEXES.

On suppose que P est convexe et distincte de E.

a. Prouver que, pour tout point x de E n'appartenant pas à P, la distance $d(x, P)$ est atteinte en un point a de P et un seul. Montrer que P est contenue dans le demi-plan constitué des points u de E tels que $\overrightarrow{ax}.\overrightarrow{au} \leqslant 0$, et que $Z(a)$ contient la demi-droite d'origine a passant par x.

b. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, $B(\alpha)$ est une partie convexe de E et que $L(\alpha)$ est la frontière de $B(\alpha)$.

c. Les résultats de cette question ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

On suppose que P est une partie convexe compacte d'intérieur non vide, dont la frontière C admet des points anguleux $b_0, b_1, \ldots, b_n$, où $b_n = b_0$, chacun des arcs C_j de C d'origine b_j et d'extrémité b_{j+1}, où $0 \leqslant j \leqslant n - 1$, étant de classe C^∞. En tout point a de C_j, on note $\vec{k}_j(a)$ le vecteur unitaire normal à C_j au point a tel que P soit contenue dans le demi-plan $\vec{k}_j(a)\,.\,\overrightarrow{au} \leqslant 0$.

Montrer que si a appartient à C_j, $a \neq b_j$, $a \neq b_{j+1}$, $Z(a)$ est égale à la demi-droite $\Delta(\vec{k}_j(a))$. Déterminer $Z(a)$ lorsque a est un des points b_j.

Prouver enfin que, pour tout $\alpha > 0$, la ligne de distance $L(\alpha)$ est de classe C^1.

Tournez la page S. V. P.

page 24 14486 CAPES de MATHEMATIQUES Math 2